*Геология и геофизика*, 2006, т. 47, № 5, с. 557—567 **http://www.izdatgeo.ru**

УДК 550.834

# ТРАЕКТОРИИ СМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ В ПЛОСКИХ ВОЛНАХ В ВЯЗКОУПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

**В. Червени, И. Пшенчик***

*Department of Geophysics, Faculty of Mathematics ad Physics,*
*Charles University, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2, Czech Republic*
** Geophysical Institute, Acad. Sci. of Czech Republic, Bočni II, 141 31 Praha 4, Czech Republic*

Траектории смещения в однородных и неоднородных плоских волнах, распространяющихся в безграничной вязкоупругой анизотропной среде, в общем случае являются эллиптическими. Исключение составляет линейная поляризация *P*- и *S*-волн, распространяющихся вдоль некоторых выделенных направлений. Типичным примером является линейная поляризация *SH*-волн, распространяющихся в плоскости симметрии вязкоупругой анизотропной среды. Двумя наиболее важными характеристиками траекторий являются ориентация осей эллипса поляризации и его эксцентриситет. Как правило, они обе существенно меняются в зависимости от направления распространения волнового фронта и от степени неоднородности рассматриваемой плоской волны. Ориентация осей эллипса поляризации *P*-волны в общем случае отклоняется от направления распространения фронта, обычно она ближе к направлению потока энергии. Ориентация эллипсов поляризации *S*-волн часто отклоняется от направления, ортогонального к направлению распространения фронта, оказываясь ближе к направлению, ортогональному потоку энергии. Эксцентриситет эллипса поляризации особенно сильно зависит от неоднородности плоской волны. Для однородных плоских волн траектории смещения обычно близки к линейным, т. е. эллипсы поляризации имеют большой эксцентриситет, который уменьшается при возрастании неоднородности волны. Для сильно неоднородных плоских волн эллипсы поляризации приближаются к окружности, и эксцентриситет становится очень малым и, как правило, также уменьшается в окрестности сингулярных направлений.

*Вязкоупругая анизотропная среда, поляризация, плоские однородные и неоднородные волны.*

## PARTICLE MOTION OF PLANE WAVES IN VISCOELASTIC ANISOTROPIC MEDIA

**V. Červený and I. Pšenčík**

Particle motion of homogeneous and inhomogeneous time-harmonic plane waves propagating in unbounded viscoelastic anisotropic media is generally elliptical. Exception is linear polarization of *P* and *S* waves propagating along some specific directions. A typical example is a linear polarization of *SH* waves propagating in a plane of symmetry of a viscoelastic anisotropic medium. Two most important characteristics of the particle motion are the orientation of the axes of the polarization ellipse and its eccentricity. They both usually vary considerably with the direction of wavefront propagation and with varying strength of inhomogeneity of the considered plane wave. The orientation of the *P*-wave polarization ellipse generally differs from the direction of wavefront propagation, and it is usually closer to the direction of the energy flux. The orientation of the polarization ellipses of *S* waves often differs from the direction perpendicular to the wavefront propagation, and it is usually closer to the direction perpendicular to the direction of the energy flux. The eccentricity of the polarization ellipse depends particularly strongly on the inhomogeneity of the plane wave. For homogeneous plane waves, the particle motion is usually nearly linear, i.e., polarization ellipses have large eccentricity, and the eccentricity decreases with increasing inhomogeneity of the wave. For strongly inhomogeneous plane waves, the polarization ellipse becomes nearly circular, eccentricity being very small. The eccentricity of the polarization ellipse usually also decreases in a vicinity of singular directions.

*Viscoelastic anisotropic medium, polarization, homogeneous and inhomogeneous plane waves*

## ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем траектории смещения в однородных и неоднородных плоских волнах, распространяющихся в безграничной вязкоупругой анизотропной среде в произвольно заданном направлении. Плоская волна задается соотношением

$$u_j(x_k, t) = U_j \exp\left[-i\omega(t - p_n x_n)\right], \qquad (1)$$

где $x_k$ — декартовы координаты, $u_j$, $p_j$ и $U_j$ — декартовы компоненты комплексных векторов смещения **u**, рефракции **p** и амплитуды **U** соответственно, $t$ — время, $\omega$ — фиксированная круговая частота, заданная положительным вещественным значением. Уравнение (1) представляет плоскую волну в том, и только в том случае, если $U_j$ и $p_j$ выбраны так, чтобы (1) удовлетворяло уравнению движения для данной среды. Это требование приводит к системе трех линейных уравнений для $U_1$, $U_2$ и $U_3$:

**© В. Червени, И. Пшенчик, 2006**

$$a_{ijkl} p_j p_l U_k = U_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Здесь $a_{ijkl}$ — комплексные нормированные на плотность вязкоупругие модули, зависящие от частоты. Они удовлетворяют соотношениям симметрии $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk} = a_{klij}$. В обозначениях Фойгта соответствующая матрица $A$ порядка $6 \times 6$ вязкоупругих модулей, нормированных на плотность, имеет положительно определенную $\mathrm{Re}\, A$, а $\mathrm{Im}\, A$ должна быть положительно определенной либо равной нулю. Условие разрешимости системы уравнений (2) записывается как

$$\det [a_{ijkl} p_j p_l - \delta_{ik}] = 0. \tag{3}$$

Соотношение (3) можно использовать для нахождения вектора рефракции **p**. Определив допустимый комплексный вектор рефракции **p** и подставив его в уравнение (2), можно вычислить вектор амплитуды **U** и определить траекторию смещения.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ РЕФРАКЦИИ И АМПЛИТУДЫ

Основное препятствие при изучении траекторий смещения в плоских волнах (1) в вязкоупругой анизотропной среде состоит не в нахождении **U** из уравнения (2), а в определении вектора рефракции **p**, удовлетворяющего условию (3). Обычно вектор рефракции задается в форме $p_i = P_i + iA_i$, где $P_i$ — вещественный вектор распространения (перпендикулярный волновому фронту), ориентированный в направлении распространения фронта, а $A_i$ — вещественный вектор затухания (перпендикулярный плоскости постоянной амплитуды), ориентированный в направлении максимального затухания амплитуд. Если $A_i$ параллелен вектору $P_i$, такая плоская волна называется однородной, а если $A_i$ и $P_i$ составляют ненулевой угол, называемый углом затухания, то такая волна называется неоднородной. Введя вещественные единичные векторы $\mathbf{N} = \mathbf{P}/|\mathbf{P}|$ и $\mathbf{M} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$, мы можем искать вектор рефракции **p** в следующем виде:

$$p_i = C^{-1}(N_i + i\delta M_i), \tag{4}$$

где $N_i$ и $M_i$ предполагаются заданными, $C$ — вещественная фазовая скорость, $\delta$ — дополнительная вещественная константа. Искомыми параметрами являются $C$ и $\delta$, их можно найти из уравнения, полученного подстановкой (4) в (3). Выражение (4) является обобщением выражения $p_i = C^{-1}N_i$, широко используемого в идеально упругой анизотропной среде, где оно приводит к задаче определения собственных значений вещественной матрицы Кристоффеля $\Gamma_{ik} = a_{ijkl} N_j N_i$ порядка $3 \times 3$ (см. например, [1—6]). Представление (4) часто используется при изучении распространения неоднородных плоских волн в вязкоупругой изотропной среде [1, 7—11]. Уравнение (4) также может быть использовано в случае однородных плоских волн ($N_i$, $M_i$), распространяющихся в вязкоупругой анизотропной среде, когда $p_i = C^{-1}(1 + i\delta) N_i$. Однако для неоднородных плоских волн в такой среде выражения (3) и (4) приводят к системе двух полиномиальных уравнений третьей степени для $C^2$ и шестой — для $\delta$. Более простые системы уравнений получаются только в случаях, как для *SH*-волн, распространяющихся в плоскости симметрии [9, 12—15]. Дополнительным недостатком системы уравнений, основанных на представлении (4), является то, что в вязкоупругих анизотропных средах она может давать $C^2 < 0$ при определенных комбинациях **N** и **M**. Обсуждение таких физически неприемлемых результатов проводится в [13, 14].

Более удобное представление вектора рефракции, применимое как в идеально упругой, так и в вязкоупругой анизотропной средах, следующее:

$$p_i = \sigma n_i + p_i^{\Sigma}, \text{ где } p_i^{\Sigma} \cdot n_k = 0. \tag{5}$$

Здесь **n** — вещественный единичный вектор, а $\mathbf{p}^{\Sigma}$ — комплексный вектор, перпендикулярный **n**. При заданных **n** и $\mathbf{p}^{\Sigma}$ комплексная величина $\sigma$ может быть определена решением уравнения, получающегося при подстановке (5) в (3), это алгебраическое уравнение шестой степени с комплексными коэффициентами. Иначе $\sigma$ может быть найдена как собственное значение комплексной матрицы порядка $6 \times 6$. Представление (5) часто используется для определения векторов рефракции волн, возникающих при отражении и преломлении на плоской границе между идеально упругими анизотропными средами [4, 16, 17], и при вычислении матриц-пропагаторов смещения—напряжения (или скорости—напряжения) в одномерных изотропных и анизотропных структурах [18—23]. В некоторых из указанных работ рассматриваются также вязкоупругие среды. Аналогичный рассматриваемому подход был предложен А. Штрохом [24] и получил название формул Штроха. Эти формулы применялись к плоским волнам, распространяющимся в идеально упругой, вязкоупругой и термовязкоупругой анизотропной средах

[25—27], а также в задачах отражения—преломления плоских волн на плоской границе раздела вязкоупругих анизотропных сред [28].

Наиболее подходящим представлением вектора рефракции для изучения распространения однородных и неоднородных плоских волн в заданном направлении **n** (перпендикуляр к волновому фронту) в безграничной вязкоупругой анизотропной среде является так называемое смешанное представление [29—31]:

$$p_i = \sigma n_i + iDm_i, \text{ где } n_k \cdot m_k = 0. \tag{6}$$

Выражение (6) представляет собой частный случай (5), когда $\mathbf{p}^{\Sigma}$ — чисто мнимая величина. В (6) **n** и **m** — вещественные, взаимно перпендикулярные единичные векторы. Очевидно, что вектор **n** параллелен вектору распространения **P**, так что **n** перпендикулярен и волновому фронту. Два вектора **n** и **m** задают так называемую плоскость распространения—затухания $\Sigma^{\parallel}$, в которой расположены векторы **P** и **A**. Скалярный параметр $D$ ($-\infty < D < \infty$) — называемый как коэффициент неоднородности, $|D|$ служит мерой неоднородности плоской волны. Плоская волна является однородной, когда $D = 0$, и неоднородной при $D \neq 0$. Два вектора **n** и **m**, наряду с коэффициентом неоднородности $D$, задают параметры рассматриваемой плоской волны и могут быть выбраны произвольно.

Комплексная скалярная величина $\sigma$ в (6) должна быть определена. Алгебраическое уравнение для этого получается подстановкой (6) в (3):

$$\det\left[a_{ijkl}\left(\sigma n_j + iDm_j\right)\left(\sigma n_l + iDm_l\right) - \delta_{ik}\right] = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) шестой степени с комплексными коэффициентами. Шесть его корней соответствуют трем модам плоской волны — $P$-, $S_1$ и $S_2$ — распространяющимся в направлении **n** и в противоположном ему. В особых случаях, в частности, в плоскостях симметрии, уравнение (7) может быть разложено на уравнения четвертой и второй степени, и их решения могут быть получены аналитически.

Найдя $\sigma$ из уравнения (7), можно определить из (6) соответствующий вектор рефракции, после чего из системы (2) может быть найден **U**. Подстановка вектора амплитуды в (1) дает комплексный вектор смещения **u**. В приведенных ниже численных примерах мы изучаем траектории смещения в плоских волнах, распространяющихся в вязкоупругой анизотропной среде. Траектории определяются как геометрическое место концов вещественного вектора смещения $\mathrm{Re}\mathbf{u}(x_k, t)$ в $x_k$ при изменении $t$. Из (1) получаем

$$\mathrm{Re}u_j(x_k, t) = (\mathrm{Re}U_j)\cos\left[\omega(t - p_m x_m)\right] - (\mathrm{Im}U_j)\sin\left[\omega(t - p_m x_m)\right]. \tag{8}$$

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ И ТРАЕКТОРИИ

Ниже мы исследуем численно поляризацию однородных и неоднородных плоских $P$-, $S_1$- и $S_2$-волн, распространяющихся в безграничной вязкоупругой анизотропной среде. Используются пять различных моделей среды: а) модель MJ трансверсально-изотропной вязкоупругой среды Якобсена и др. [32]; б) модель MJ ELAST, соответствующая модели MJ, но с нулевыми мнимыми частями вязкоупругих модулей; в) модель MJ ROT, представляющая собой поворот модели MJ; г) модель ORTHO, в которой вещественные части вязкоупругих модулей соответствуют идеально упругой орторомбической модели Шенберга и Хельбига [33], а мнимые части взяты из модели MJ; д) модель ORTHO ELAST, соответствующая модели Шенберга и Хельбига.

**Модель MJ.** Мы рассматриваем плоские волны, распространяющиеся в трансверсально-изотропной среде, для которой комплексные модули были получены в [32]. Выбранная модель соответствует частоте приблизительно 35 Гц и плотности 1000 кг/м$^3$. Матрица $A$, содержащая $6 \times 6$ комплексных вязкоупругих модулей, нормированных на плотность, для трансверсально-изотропной среды с вертикальной осью симметрии имеет вид (значения даны в (км/с)$^2$):

$$A = A_1 - iA_2, \tag{9}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 46{,}631 & 5{,}983 & 4{,}278 & 0 & 0 & 0 \\ & 46{,}631 & 4{,}278 & 0 & 0 & 0 \\ & & 19{,}931 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3{,}444 & 0 & 0 \\ & & & & 13{,}444 & 0 \\ & & & & & 20{,}324 \end{pmatrix} \tag{10}$$

и

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}033 & 0{,}022 & 0{,}156 & 0 & 0 & 0 \\ & 0{,}033 & 0{,}156 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1{,}312 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0{,}055 & 0 & 0 \\ & & & & 0{,}055 & 0 \\ & & & & & 0{,}005 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Отметим, что матрицы $A_1$ и $A_2$ положительно определены, и $A_1$ характеризуется особенностью типа касания индикатрис на вертикальной оси (точнее, оси бесконечного порядка).

Мы анализируем плоские волны, у которых плоскость распространения—затухания $\Sigma^{\parallel}$ совпадает с вертикальной плоскостью симметрии $\Sigma^S$ и параллельна плоскости $(x, z)$. Таким образом, компоненты единичных векторов **n** и **m** могут быть выражены как

$$n_1 = \sin i,\ n_2 = 0,\ n_3 = \cos i,\ m_1 = \cos i,\ m_2 = 0,\ m_3 = -\sin i, \qquad (12)$$

где $i$ называется углом распространения.

Для лучшего понимания начнем с индикатрис фазовой скорости *P*- и *S*-волн в зависимости от угла распространения $i$ в плоскости симметрии $\Sigma^S$. Они изображены в полярных координатах, где $i = 0°$ направлено вверх, а $i = 90°$ вправо (12). На рис. 1 показаны индикатрисы для четырех значений коэффициента неоднородности $D$: $D = 0$ (однородная волна), $D = 0{,}057$; $0{,}059$ и $0{,}2$. При $D = 0$ фазовые скорости симметричны относительно вертикальной оси. Индикатриса, соответствующая самой быстрой волне, отделена от двух других и отвечает *P*-волне. Более высокая из оставшихся скоростей соответствует *SH*-волне (см. траектории смещения на рис. 2), а медленная — *SV*-волне. Индикатрисы фазовых скоростей обеих *S*-волн касаются на вертикальной оси. При увеличении значения $D$ кривые фазовых скоростей *P*- и *SV*-волн деформируются вблизи вертикальной оси ($D = 0{,}057$) и приближаются друг к другу. Индикатриса *SV*-волны пересекает индикатрису *SH*-волны, и фазовые скорости не симметричны относительно вертикальной оси. При возрастании $D$ кривые фазовых скоростей *P*- и *SV*-волн соприкасаются, т. е. при соответствующем (ненулевом) значении угла распространения $i$ *P*- и *SV*-волны имеют одинаковую скорость. При дальнейшем увеличении $D$ фазовые скорости уменьшаются (они станут нулем при $|D| \to \infty$), и все три индикатрисы становятся почти неразличимыми. В вязкоупругой или идеально упругой изотропной среде соответствующие индикатрисы как для *P*-, так и для *S*-волн были бы окружностями.

На приведенных ниже графиках толщина линий траекторий различается в зависимости от фазовой скорости рассматриваемой волны. Толстая кривая соответствует самой быстрой, более тонкая — промежуточной, а самая тонкая — медленной волне. Когда плоскость распространения—затухания совпадает с $\Sigma^S$, плоская *SH*-волна поляризована линейно в направлении, перпендикулярном $\Sigma^{\parallel}$. Графики траекторий в плоскости распространения—затухания соответствуют *P*- и *SV*-волнам, а поляризация *SH*-волн представлена только точками.

На рис. 2 показаны траектории смещения при коэффициенте неоднородности $D = 0{,}02$. Изображены эллипсы поляризации для двенадцати значений угла распространения $i$, определяющего вектор **n** (12). Векторы **n** направлены из центра рисунка к центрам эллипсов поляризации. Видно, что и *P*-, и *SV*-волны поляризованы эллиптически, и эллипсы поляризации взаимно перпендикулярны. При некоторых углах

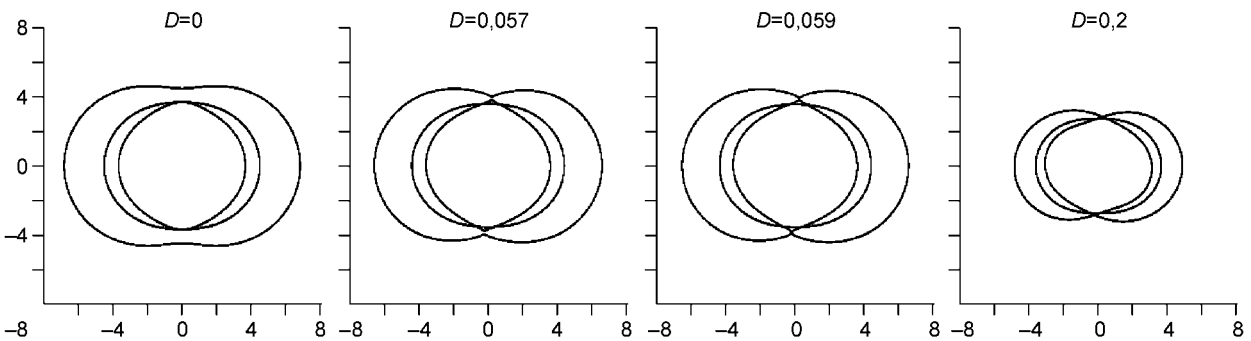
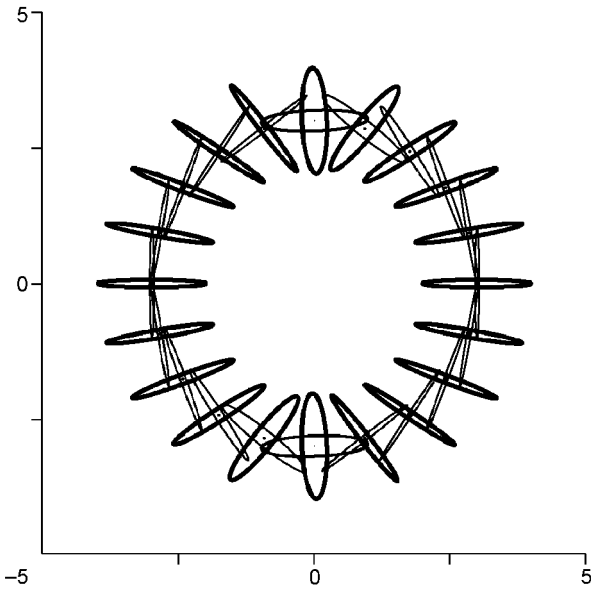



**Рис. 1. Полярные диаграммы фазовой скорости $C$ в плоскости симметрии модели MJ для $D = 0$ (однородная волна), 0,057, 0,059 и 0,2.**

Внешние кривые — самая быстрая волна (*P*-волна), внутренние кривые — *SV*- и *SH*-волны; *SV*-волна имеет наименьшую скорость, за исключением направлений вблизи вертикали при $D > 0$.

**Рис. 2. Траектории смещения в *P*- и *SV*-волнах в той же плоскости модели MJ, что и на рис. 1, при *D* = 0,02.**

Утолщенные кривые — быстрая волна (*P*-волна), более тонкая — промежуточная, самая тонкая — медленная волна; *SH*-волна поляризована перпендикулярно плоскости симметрии.




распространения длинная ось эллипса поляризации заметно отклоняется от направления **n** для *P*-волны и от направления, перпендикулярного **n**, для *S*-волны. Эти отклонения минимальны в горизонтальном и вертикальном направлениях, представляющих выделенные направления матрицы $A_1$. Эксцентриситет эллипсов поляризации значительно меняется в зависимости от угла распространения. Эксцентриситеты эллипсов поляризации *P*- и *S*-волн при заданном угле распространения близки, но не равны. Особенно сильные изменения эксцентриситета можно заметить вблизи вертикали. В идеально упругом случае в этом направлении отмечается особенность типа касания. Симметрии относительно вертикали в ориентации эллипсов поляризации и в их эксцентриситете нет, хотя полная симметрия наблюдается для **n** и **–n**. Можно отметить аномальное поведение фазовых скоростей *SV*- и *SH*-волн, на вертикали *SV*-волна становится быстрее, чем *SH*-волна.

На рис. 3 мы рассматриваем поведение поляризации при изменении значения коэффициента неоднородности *D*, а именно, при *D* = 0; 0,01; 0,02; 0,03; 0,05 и 0,1. По горизонтальной оси отложен угол

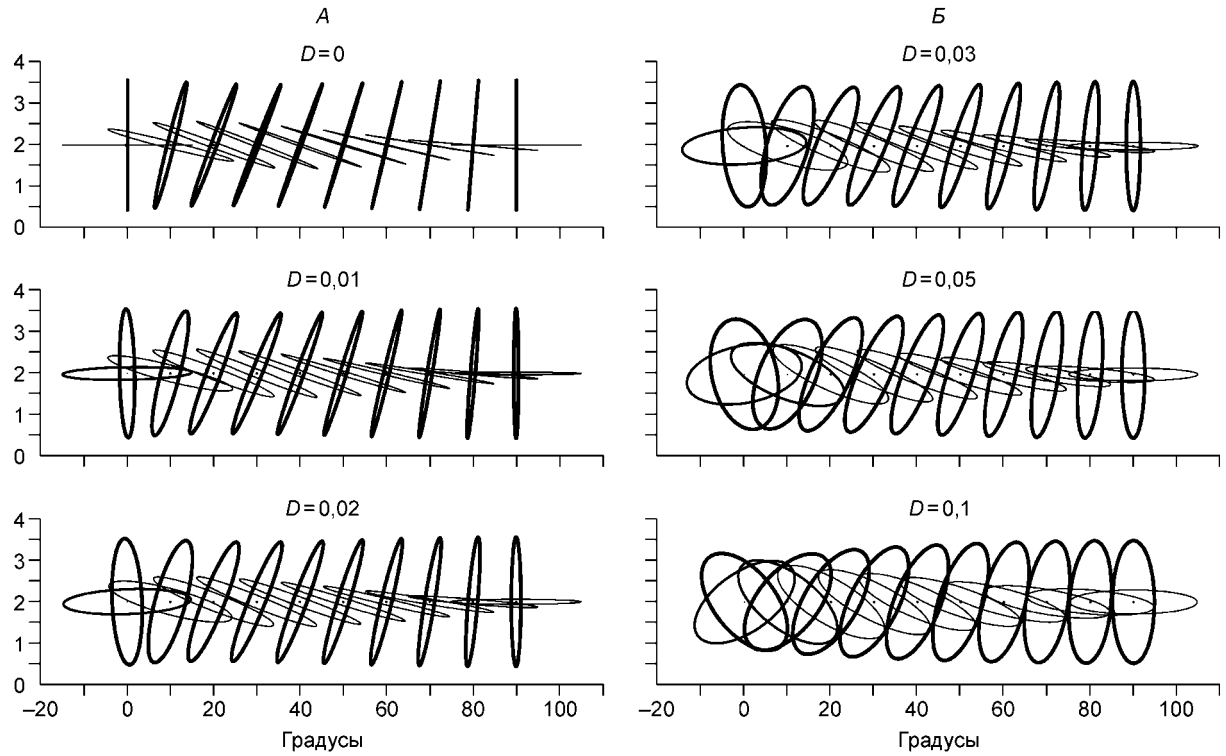



**Рис. 3. Траектории смещения в *P*- и *S*-волнах в зависимости от угла распространения *i* в той же плоскости модели MJ, что и на рис. 2.**

*А* — при *D* = 0 (однородная волна), 0,01 и 0,02; *Б* — вертикальное направление на рисунке соответствует направлению распространения волнового фронта для всех углов распространения. Используется различная толщина, как на рис. 2. Большая толщина траектории *SV*-волны при *i* = 0° указывает, что в этом направлении она быстрее, чем *SH*-волна.

распространения $i$. Вертикальное направление на рисунке соответствует направлению вектора **n** — перпендикуляра к волновому фронту. В таком представлении отклонения длинной оси эллипсов поляризации $P$-волны от направления **n** выражены наиболее отчетливо. Отметим, что при всех $D$ длинная ось параллельна **n** для $P$-волн и перпендикулярна ему для $S$-волн, только когда $i = 90°$. При $i = 0°$ это верно лишь для однородной волны, $D = 0$. С увеличением $D$ угол $i$, при котором эти два направления оказываются параллельными и перпендикулярными, смещается от нуля в сторону положительных значений. При $D = 0{,}1$ (см. рис. 3,*Б*) угол $i = 5°$.

Как видно из рис. 3, эллипсы поляризации для однородных плоских волн ($D = 0$) имеют очень большой эксцентриситет, который уменьшается при возрастании $D$. При бóльших значениях $D$, чем приведенные на рис. 3,*Б*, эллипсы поляризации становятся близкими к окружности, поэтому становится трудно различить $P$- и $SV$-волны по их поляризации. Отметим также, что при увеличении $D$ диапазон углов распространения $i$, при которых $SV$-волна распространяется быстрее, чем $SH$-волна, тоже увеличивается. Все это соблюдается и при отрицательных значениях $D$.

На рис. 4 сопоставляются три важных направления, характеризующих распространение плоских волн в вязкоупругой анизотропной среде. Траектории смещения в зависимости от угла распространения отдельно для плоских $P$-, $SV$- и $SH$-волн изображены в сравнении с соответствующими направлениями усредненного по времени потока энергии (короткие линии) и в сравнении с вертикальным направлением, представляющим направление распространения волнового фронта. Видно, что в областях регулярности, вне окрестности оси симметрии $i = 0°$, направление потока энергии примерно параллельно или перпендикулярно большим осям эллипсов поляризации, но оба они могут значительно отклоняться от направления распространения фронта.

**В модели MJ ELAST** матрица модулей 6 × 6, нормированных на плотность, задается как $A = A_1$ (9), т. е. это случай идеально упругой среды. Сравним результаты для идеально упругой анизотропной и вязкоупругой сред, полученные в предыдущем разделе.

На рис. 5 изображено то же самое, что на рис. 3,*А*, но для идеально упругой анизотропной среды. В случае однородной волны ($D = 0$) поляризация строго линейна не только для $SH$-волны, но и для $P$-, и для

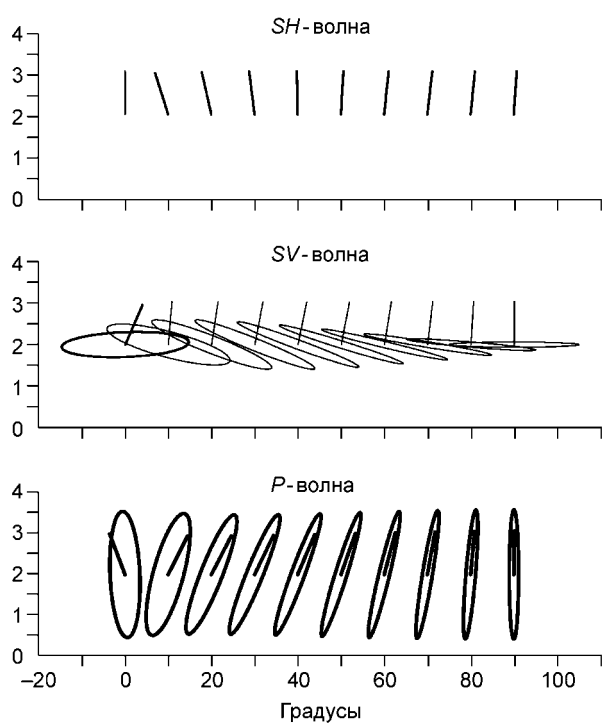



**Рис. 4. Сопоставление направлений потока энергии (короткие линии) и эллипсов поляризации при $D = 0{,}02$ для $P$-, $SV$- и $SH$-волн в модели MJ.**

Вертикальное направление на рисунке соответствует направлению распространения волнового фронта.

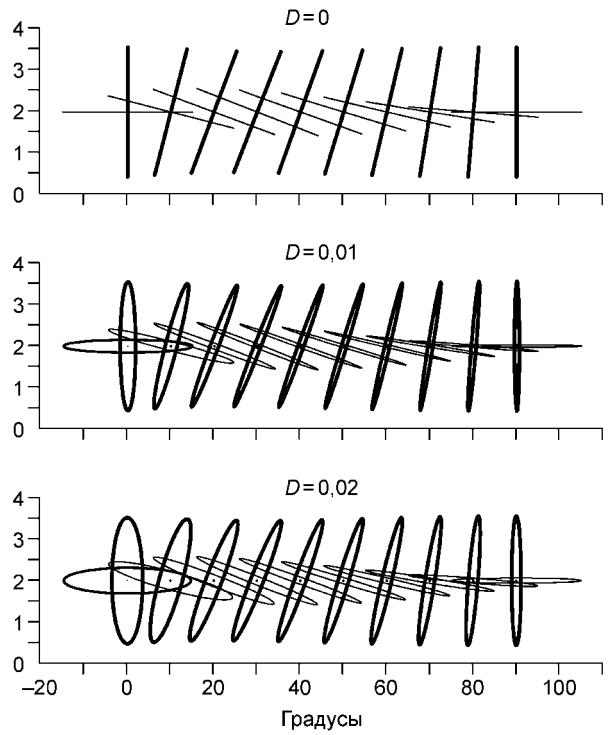



**Рис. 5. То же, что на рис. 3, но для модели MJ ELAST.**

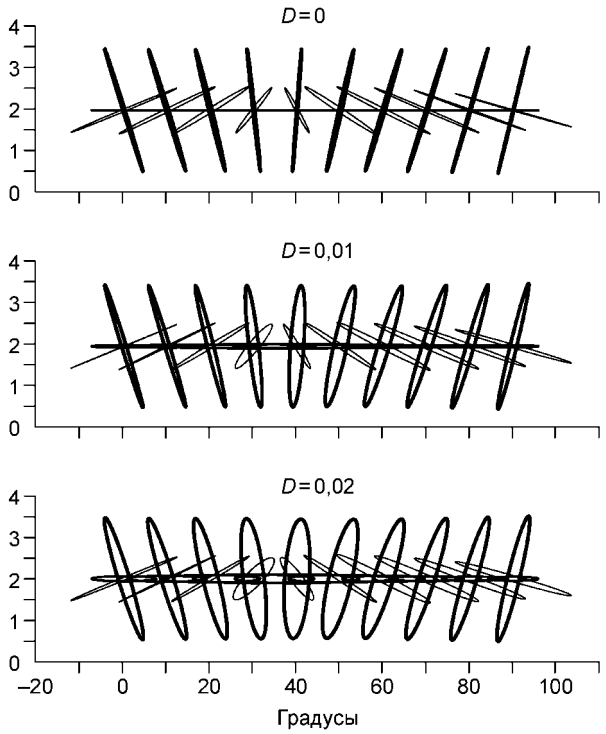



**Рис. 6. То же, что на рис. 3, но для модели MJ ROT — результат поворота модели, представленной на рис. 2.**

Утолщенные линии — *P*-волна, тонкие — медленная *S*-волна.

*SV*-волн. В случае неоднородных плоских волн ($D \neq 0$) поляризация *P*- и *SV*-волн становится эллиптической.

Сравнение рис. 3 и 5 показывает, что траектории смещения *P*- и *SV*-волн в идеально упругой и вязкоупругой анизотропной средах при заданных $D$ и $i$ очень похожи. Это свидетельствует, что метод возмущений для однородных, как и для неоднородных плоских волн, распространяющихся в слабовязкоупругой среде, для которой идеально упругая среда взята в качестве референтной, будет работать вполне успешно.

**Модель MJ ROT.** В этом разделе мы хотим проиллюстрировать, что алгоритмы, описанные во введении и разделе 1, успешно работают и вне плоскостей симметрии. В этом случае больше нельзя говорить об *SV*- и *SH*-волнах, поэтому мы называем волны $S_1$ (быстрая) и $S_2$. Мы взяли модель MJ и повернули ее на 40° вокруг оси $x_2$, а затем на 30° вокруг вертикали (оси $x_3$). На рис. 6 показаны проекции траекторий смещения на плоскость распространения—затухания $\Sigma^{\|}$. Поскольку $\Sigma^{\|}$ не совпадает с плоскостью симметрии, мы можем наблюдать смещение во всех трех плоских волнах. Три графика на рис. 6 соответствуют $D = 0$; 0,01 и 0,02.

Траектории на рис. 6 обладают чертами сходства с рис. 3, в частности, эксцентриситет эллипсов уменьшается при возрастании $D$. Вызывает интерес поведение траекторий смещения быстрой *S*-волны на рис. 6, которая поляризована строго горизонтально при $D = 0$ и почти горизонтально при $D \neq 0$. Это явление объясняется просто. В трансверсально-изотропной среде любой вектор будет расположен в плоскости симметрии. Кроме того, одна из *S*-волн будет поляризована линейно и смещения в ней будут перпендикулярны этой плоскости. Таким образом, вектор смещения любой однородной плоской волны расположен в плоскости симметрии и перпендикулярен поляризации указанной *S*-волны. Поскольку векторы рефракции на рис. 6 расположены в плоскости рисунка и вертикальны, проекция поляризации этой *S*-волны горизонтальна. При увеличении $D$ поляризация этой волны также становится эллиптической и начинает отклоняться от горизонтали.

**Модель ORTHO.** Рассмотрим теперь орторомбическую модель. Матрица $A_1$ была предложена в [33] и имеет следующий вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9{,}00 & 3{,}60 & 2{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ & 9{,}84 & 2{,}40 & 0 & 0 & 0 \\ & & 5{,}94 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2{,}00 & 0 & 0 \\ & & & & 1{,}60 & 0 \\ & & & & & 2{,}18 \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Здесь также использована нотация Фойгта, элементы $A_1$ приведены в $(\text{км/с})^2$. Эта модель характеризуется двумя особенностями (конические точки) в плоскости $(x, z)$ при углах распространения $i = 20{,}1°$ и 59,8°, одной конической точкой в плоскости $(y, z)$ при угле распространения $i = 72{,}5°$, и еще одной конической точкой при угле распространения $i = 46{,}53°$ в вертикальной плоскости, отклоняющейся от $(x, z)$ на 44,89° [33].

В модели ORTHO матрица $A_1$ представлена (13), а матрица $A_2$ такая же, как и в модели MJ (11).

На рис. 7 изображены траектории смещения в плоскости распространения—затухания $\Sigma^{\|}$, выбранной так, что она совпадает с плоскостью симметрии $(x, z)$, коэффициент неоднородности $D = 0{,}02$. Рисунок 7 аналогичен рис. 2, различия в них проявляются только при углах распространения, где волна *SV* ста-

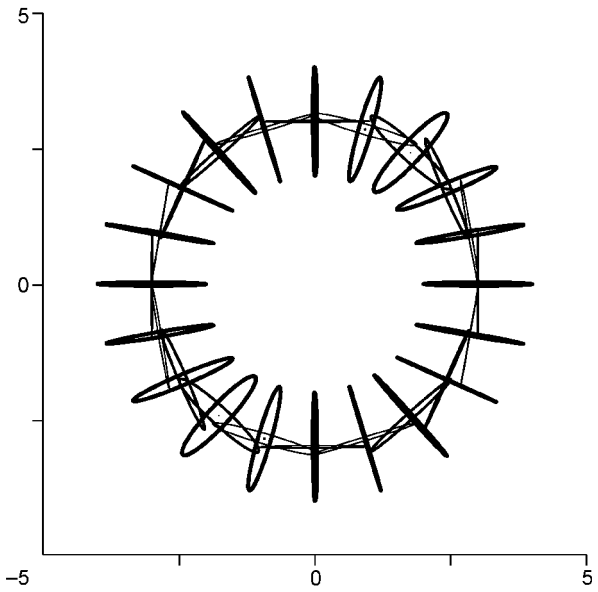



**Рис. 7. Траектории смещения в *P*- и *SV*-волнах при $D = 0{,}02$ в плоскости симметрии $(x, z)$ модели ORTHO.**

Используется различная толщина, как на рис. 2. *SH*-волна поляризована перпендикулярно плоскости симметрии, *SV*-волна более быстрая при углах распространения $i \sim 20 - 60°$.

новится быстрее, чем *SH*, и которые приблизительно ограничены коническими точками матрицы $A_1$, т. е. расположены между ~20 и 60°. Как и на рис. 2, на рис. 7 эксцентриситет эллипсов поляризации минимален вблизи тех направлений, в которых *SV*-волна быстрее. Интересно, что эксцентриситеты у *P*- и *SV*-волн меняются сходным образом.

На последующих графиках показаны только траектории смещения для *S*-волн. Быстрая *S*-волна обозначена утолщенной линией, а медленная — тонкой. Изменения траекторий при изменении коэффициента неоднородности $D$ показаны на рис. 8 в том же виде, как на рис. 3—5. Видно, что при изменении угла распространения одна из *S*-волн становится быстрее другой, и наоборот. За исключением некоторых направлений при $D = 0$, поляризация эллиптическая, в противоположность подобным траекториям, построенным для плоскости симметрии $(y, z)$. Здесь (рис. 9) при любых изменениях $D$ обе волны имеют линейную поляризацию. Хотя поляризация

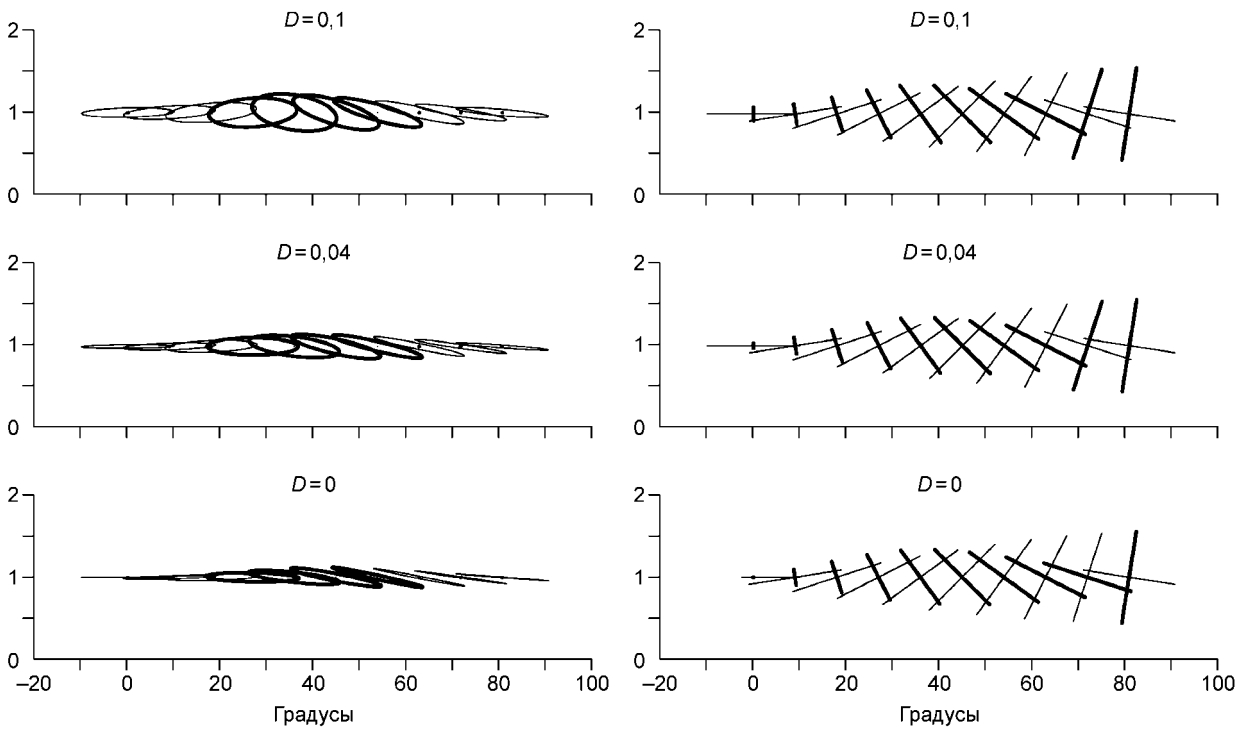



**Рис. 8. Траектории смещения в *S*-волнах в зависимости от угла распространения $i$ при $D = 0$, 0,04 и 0,1 в плоскости симметрии $(x, z)$ модели ORTHO.**

Вертикальное направление на рисунке соответствует направлению распространения волнового фронта. Утолщенными кривыми изображены траектории для *S*-волны с большей фазовой скоростью. *S*-волны имеют *SV*- и *SH*-поляризацию. *SV*-волна более быстрая при углах распространения $i \sim 20 - 60°$.

**Рис. 9. Траектории смещения в *S*-волнах в зависимости от угла распространения $i$ при $D = 0$, 0,04 и 0,1 в плоскости симметрии $(y, z)$ модели ORTHO.**

Утолщенными кривыми изображены траектории для *S*-волны с большей фазовой скоростью. Поляризация волн $S_1$ и $S_2$ резко меняется между $i = 70°$ и 80°, угол смены поляризации меняется в зависимости от $D$. Видна линейная поляризация обеих *S*-волн.

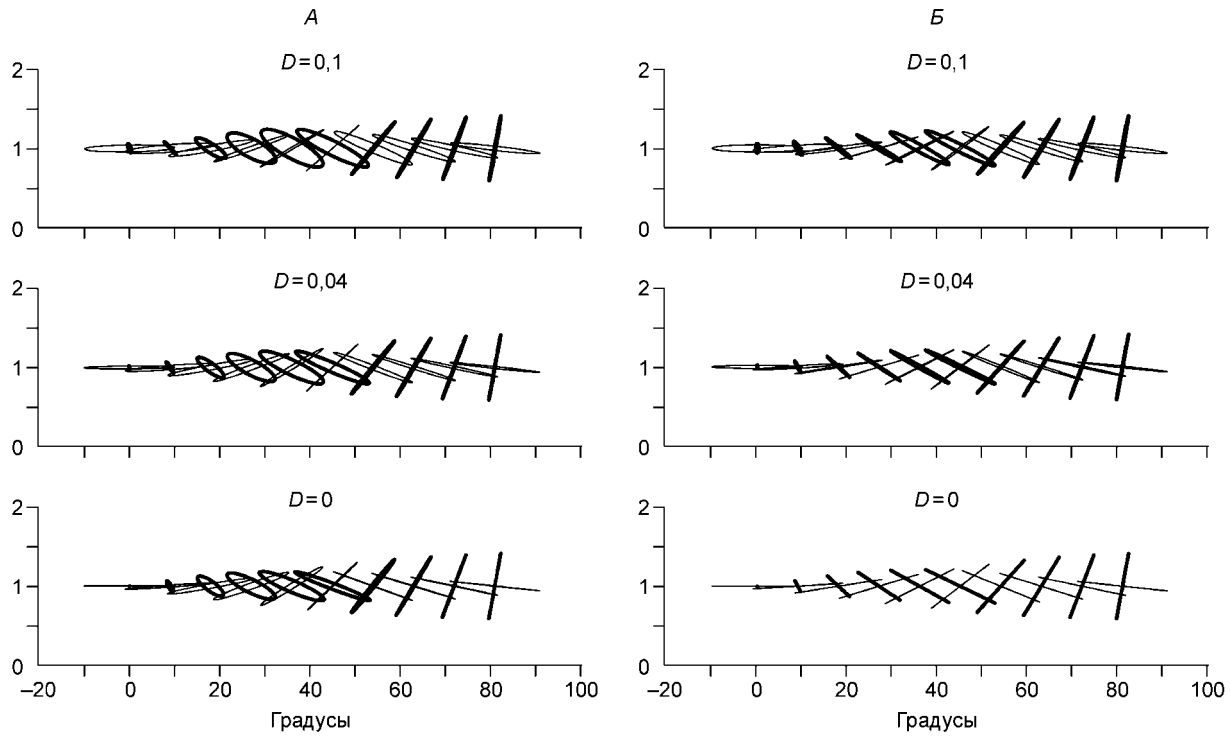



**Рис. 10. Траектории смещения в *S*-волнах в зависимости от угла распространения *i* при *D* = 0, 0,04 и 0,1 в вертикальной плоскости модели ORTHO (*А*), составляющей на 44,89° с плоскостью (*x*, *z*); то же, для модели ORTHO ELAST (*Б*).**

Утолщенными кривыми показаны траектории для *S*-волны с большей фазовой скоростью. Поляризация волн $S_1$ и $S_2$ резко меняется между $i = 45°$ и 54°.

существенно меняется в зависимости от угла распространения, она практически не зависит от *D*. Есть только одно существенное исключение. Угол распространения, соответствующий направлению, в котором обе *S*-волны распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями, уменьшается при возрастании *D*, как видно из сопоставления графиков для $D = 0$ и $D = 0{,}04$ при $i \sim 70°$. Отметим значительные отклонения траекторий от направления, перпендикулярного направлению распространения волнового фронта.

На рис. 10,*А* показаны траектории смещения в вертикальной плоскости, отклоняющейся от (*x*, *z*) на 44,89°, т. е. в плоскости, в которой в $A_1$ наблюдается коническая точка при угле распространения 46,53°. Видно, что эксцентриситет эллипсов поляризации у одной из *S*-волн (быстрой при углах распространения меньше 46,53°) систематически оказывается меньше, чем у другой, и он уменьшается при уменьшении угла распространения. Опять же отметим значительные отклонения траекторий от направления, перпендикулярного направлению распространения волнового фронта.

**Модель ORTHO ELAST.** Здесь рассматривается исходная модель [33], т. е. $A_1$ представлена (13), а матрица $A_2 = 0$. За исключением случая $D = 0$, графики, рассчитанные для распространения в плоскости (*x*, *z*), очень похожи на полученные для предыдущей модели (см. рис. 8), поэтому они не приводятся. Отличие при $D = 0$ состоит в том, что траектории движения частиц в идеально упругом случае имеют строго линейную поляризацию. Графики, рассчитанные для распространения в плоскости (*y*, *z*), аналогичны полученным для предыдущей модели (см. рис. 9), даже при $D = 0$, и также не приведены. Более выраженные различия можно увидеть на графиках (см. рис. 10,*Б*) для ситуаций, отвечающих рис. 10,*А*. При $D = 0$ траектории снова строго линейные, а при ненулевом *D* эксцентриситет эллипсов поляризации очень велик.

## ВЫВОДЫ

Обобщить наблюдения, сделанные на приведенных моделях, можно следующим образом.

1. В большинстве случаев и *P*-, и *SV*-волны поляризованы эллиптически. Линейная поляризация может наблюдаться вдоль некоторых особых направлений, например, *SH*-волны в плоскостях симметрии

модели MJ, или обе *S*-волны в плоскости симметрии $(y, z)$ модели ORTHO. Большие оси эллипсов поляризации *P*- и *SV*-волн взаимно перпендикулярны.

2. Для некоторых **n** большие оси эллипсов поляризации *P*-волн существенно отклоняются от направления **n**. Это верно и для *SV*-волн, если отсчитывать отклонение от направления, перпендикулярного **n**.

3. Эксцентриситет эллипсов поляризации значительно меняется при изменении **n**.

4. Эксцентриситеты эллипсов поляризации *P*- и *SV*-волн при заданном **n** близки, но не равны.

5. Не наблюдается симметрии в ориентации эллипсов поляризации и в их эксцентриситете по отношению к вертикали, как в идеально упругом случае. Симметрия проявляется при $D = 0$, а с возрастанием $|D|$ увеличивается асимметрия. Полная симметрия отмечается для **n** и **–n**.

6. Направление потока энергии, как правило, ближе к большей (меньшей) оси эллипсов поляризации *P*-(*S*-) волн, чем к направлению **n**.

Авторы выражают признательность С.В. Гольдину за его ценный вклад в теорию распространения сейсмических волн, М. Якобсену, предоставившему данные для численных примеров.

Данное исследование было проведено при поддержке совместного проекта „Сейсмические волны в сложных трехмерных структурах“, проектов 205/04/1104 и 205/05/2182 Агентства грантов Республики Чехия, а также проекта A3012309 Агентства грантов Академии наук Республики Чехия.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. **Аки К., Ричардс П.** Количественная сейсмология. М., Мир, 1983, 880 с.
2. **Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.** Геометрическая оптика неоднородных сред. М., Наука, 1980.
3. **Петрашень Г.И.** Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л., Наука, 1980, 280 с.
4. **Федоров Ф.И.** Теория упругих волн в кристаллах. М., Наука, 1965, 386 с.
5. **Helbig K.** Foundations of anisotropy for exploration seismics. Pergamon, Oxford, 1994, 486 p.
6. **Musgrave M.J.P.** Crustal acoustic. Holden Day, San Francisco, 1970.
7. **Borcherdt R.D.** Energy and plane waves in linear viscoelastic media // J. Geophys. Res., 1973, v. 78, p. 2442—2533.
8. **Buchen P.W.** Plane waves in linear viscoelastic media // Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1971, v. 23, p. 531—542.
9. **Carcione J.M.** Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media. Amsterdam, Pergamon, 2001, 316 p.
10. **Caviglia G., and Morro A.** Inhomogeneous waves in solids and fluids // World Scientific, Singapore, 1992, p. 1—15.
11. **Krebes E.S.** Discrepancies in energy calculations for inhomogeneous waves // Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1983, v. 75, p. 839—846.
12. **Carcione J.M., Cavallini F.** Energy balance and fundamental relations in anisotropic-viscoelastic media // Wave Motion, 1993, v. 18, p. 11—20.
13. **Carcione J.M., Cavallini F.** Forbidden directions for inhomogeneous pure shear waves in dissipative anisotropic media // Geophysics, 1995, v. 60, p. 522—530.
14. **Krebes E.S., Le L.H.T.** Inhomogeneous plane waves and cylindrical waves in anisotropic anelastic media // J. Geophys. Res., 1994, v. 99, № B12, p. 23899—23919.
15. **Romeo M.** Inhomogeneous waves in anisotropic dissipative solids // Q.J. Mech. Appl. Math., 1994, v. 47, p. 481—491.
16. **Daley P.F., Hron F.** Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media // Bull. Seismol. Soc. Amer., 1977, v. 67, p. 661—676.
17. **Gajewski D., Pšenčik I.** Computation of high-frequency seismic wavefileds in 3-D laterally inhomogeneous anisotropic media // Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1987, v. 91, p. 383—411.
18. **Frazer L.N., Fryer G.J.** Useful properties of the system matrix for a homogeneous anisotropic visco-elastic solid // Geophys. J., 1989, v. 97, p. 173—177.
19. **Kennett B.L.N.** Seismic wave propagation in stratified media. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1983, 342 p.
20. **Kennett B.L.N.** The seismic wavefield. V. I: Introduction and theoretical development. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2001.
21. **Thomson C.J.** Notes on Rmatrix, a program to find the seismic plane-wave response of a stack of anisotropic layers // Queen's University, Dept. of Geol. Sci. Kingston, 1996.
22. **Thomson C.J.** Notes on waves in layered media to accompany program'Rmatrix // Ibid., 1998, Rep.7, p. 147—162.

23. **Woodhouse J.H.** Surface waves in laterally varying structure // Geophys. J. Rot. Astron. Soc., 1974, v. 37, p. 461—490.
24. **Stroh A.N.** Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys., 1962, v. 41, p. 77—103.
25. **Shuvalov A.L.** On the theory of plane inhomogeneous waves in anisotropic elastic media // Wave Motion, 2001, v. 34, p. 401—429.
26. **Shuvalov A.L., Scott N.H.** On the properties of homogeneous viscoelastic waves // Q.J. Mech. Appl. Math., 1999, v. 52, p. 405—417.
27. **Shuvalov A.L., Scott N.H.** On singular features of acoustic wave propagation in weakly dissipative anisotropic thermoviscoelasticity // Acta Mechanica, 2000, v. 140, p. 1—15.
28. **Caviglia G., Morro A.** Existence and uniqueness in the reflection-transmission problem // Q.J. Mech. Appl. Math., 1999, v. 52, p. 543—564.
29. **Červeny V.** Inhomogeneous harmonic plane waves in viscoelastic anisotropic media // Stud. Geophys. Geod., 2004, v. 48, p. 167—186.
30. **Červeny V., Pšenčik I.** Slowness vectors in viscoelastic anisotropic media. Part 1: Theory // Geophys. J. Int., 2005, v. 161, p. 197—212.
31. **Červeny V., Pšenčik I.** Plane waves in viscoelastic anisotropic media, Part 2: Numerical examples // Ibid., p. 213—229.
32. **Jakobsen M., Johansen T.A., McCann C.** The acoustic signature of fluid flow in complex porous media // J.Appl. Geophys., 2003, v. 54, p. 219—246.
33. **Schoenberg M., Helbig K.** Orthorhombic media: modeling elastic wave behavior in a vertically fractured earth // Geophysics, 1997, v. 62, p. 1954—1974.

*Поступила в редакцию*
*28 сентября 2005 г.*